Günter Hanisch

Warum ist die Mathematik so exakt?

0. Einleitung

Der folgende Artikel beschreibt das Wissen über die Mathematik, das nach Ansicht des Verfassers von einem/einer Maturanten/Maturantin erwartet werden sollte. Er enthält somit keine neuen mathematischen Erkenntnisse, allerdings können Teile davon 1 : 1 in den Unterricht umgesetzt werden.

Die oben gestellte Frage kann – je nachdem welches Wort man betont – ganz verschieden beantwortet werden.

1. **Warum** ist die Mathematik so exakt? Oder: *Wie* macht sie das?

Der Hauptgrund ist meines Erachtens der, dass sich ein mathematischer Beweis von einem Beweis, wie er in anderen Wissenschaften üblich ist, unterscheidet. „Ein Beweis ist in der Mathematik die als fehlerfrei anerkannte Herleitung der Richtigkeit oder auch Unrichtigkeit einer Aussage aus einer Menge von Axiomen, die als wahr vorausgesetzt werden, und anderen Aussagen, die bereits bewiesen sind.“ (Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_%28Mathematik%29)
Und daraus folgt für die mathematischen Sätze: „In diesem Sinn sind mathematische Sätze prinzipiell endgültige und allgemeingültige Wahrheiten, so dass die Mathematik als die exakte Wissenschaft betrachtet werden kann.“ (Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik). Mathematik unterscheidet sich eben von den anderen Wissenschaften dadurch, dass sie ihre Sätze aus sich ohne Mithilfe anderer Wissenschaften beweist, sofern man die Logik der Mathematik zurechnet.

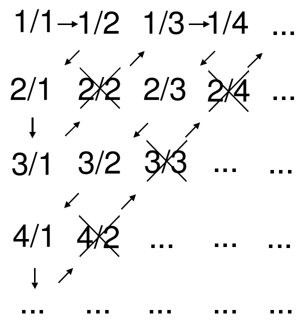
2. Warum **ist** die Mathematik so exakt? War sie es schon immer?

Die Methode der wissenschaftlichen Mathematik verdanken wir Euklid. Seine „Elemente“ (um 325 v. Chr. entstanden) sind das mit Abstand einflussreichste Buch der Mathematik-Geschichte. Insbesondere sind die Kapitel über die Geometrie beispielgebend für die akademische Mathematik. (Vgl. Norbert Froese: Euklid und die Elemente ⍰ Die Entdeckung der axiomatischen Methode durch Euklid. http://www.antike-griechische.de/Euklid.pdf)
„Er zeigte darin die Konstruktion geometrischer Objekte, natürlicher Zahlen sowie bestimmter Größen und untersuchte deren Eigenschaften. Dazu benutzte er Definitionen, Postulate (nach Aristoteles Grundsätze, die akzeptiert oder abgelehnt werden können) und Axiome (nach Aristoteles allgemeine und unbezweifelbare Grundsätze). Viele Sätze der Elemente stammen offenbar nicht von Euklid selbst. Seine Hauptleistung besteht vielmehr in der Sammlung und einheitlichen Darstellung des mathematischen Wissens sowie der strengen Beweisführung, die zum Vorbild für die spätere Mathematik wurde.“ (Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Euklid)

3. Warum ist **die** Mathematik so exakt? Gibt es die *eine* Mathematik?

Das ist Definitionssache. Erinnern wir uns an Euklid:
Eines seiner Axiome war das Parallelenaxiom: „In einer Ebene ε gibt es zu jeder Geraden g und *jedem* Punkt A außerhalb von g *genau* eine Gerade, die zu g parallel ist und durch den Punkt A geht.“
Über 2000 Jahre lang wurde versucht, dieses Axiom zu beweisen, also es aus den anderen Axiomen herzuleiten, bis Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) erkannte, dass dies unmöglich ist. Es müsste daher Geometrien geben, in der es mehrere parallele Geraden gibt oder in der es keine Parallele gibt. Nikolai Lobatschewski (1792 - 1856) stellte als erster 1826 eine neuartige Geometrie vor – die hyperbolische Geometrie –, in der zwar die anderen Axiome der euklidischen Geometrie gelten, es aber mehr als eine Parallele durch einen Punkt zu einer gegebenen Gerade gibt. Von Bernhard Riemann (1826 - 1866) stammt die elliptische Geometrie, in der es keine Parallele gibt. (Ein anschauliches Modell dafür ist die Kugeloberfläche). Gibt es also nur eine Geometrie oder mehrere?

Ein ähnliches Problem ist die Kontinuumshypothese. Bei ihr geht es um die Mächtigkeit von Zahlenmengen. Für endliche Mengen ist diese die Anzahl ihrer Elemente. Zwei Mengen haben die gleiche Mächtigkeit, wenn sie sich bijektiv aufeinander abbilden lassen. So sind die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der ganzen Zahlen gleich mächtig, aber auch die Menge der rationalen Zahlen, was sich mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor 1845 - 1918) zeigen lässt (siehe nebenstehende Abbildung, in der die bereits vorgekommenen Zahlen durchgestrichen sind). Die Menge der reellen Zahlen hingegen ist mächtiger. Die Hypothese besagt nun, dass es keine Menge gibt, deren Mächtigkeit größer als die der natürlichen Zahlen ist, aber kleiner ist als die der reellen Zahlen. Kurt Friedrich Gödel (1906 - 1978) zeigte, dass diese Hypothese sich nicht widerlegen lässt und Paul Joseph Cohen (1934 - 2007) zeigte, dass sie sich auch nicht beweisen lässt. Die Hypothese ist also im Rahmen der anderen Axiome unentscheidbar. Man kann daher ein Gebäude der Mathematik errichten, in der die Kontinuumshypothese gilt, und ein solches, in der sie nicht gilt.



Dieses Dilemma kann aber einfach definitorisch gelöst werden, indem man eine Definition für Mathematik wählt, die beide Fälle einschließt:
„Die Mathematik ist die Wissenschaft, die selbst geschaffene abstrakte Muster und Strukturen auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht.“ (Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik)

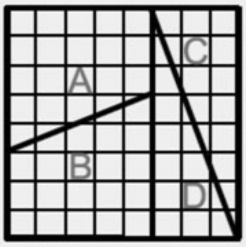
4. Warum ist die **Mathematik** so exakt?

Auf diesen Punkt wurde bereits im ersten Abschnitt eingegangen. Mathematik unterscheidet sich von den anderen Wissenschaften insbesondere durch ihre Beweismethode; daneben ist auch die Art der Definition ihrer Objekte einzigartig. Daher sollten Schüler/innen im Mathematikunterricht auch das Beweisen gelehrt bekommen und selbstständig Beweise durchführen.

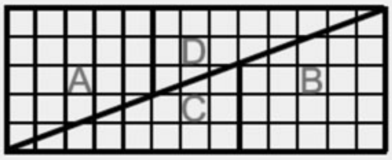
Dazu aber ist es notwendig, dass sie erkennen, dass und warum Beweisen notwendig ist, denn in den anderen Unterrichtsfächern geschieht des im Allgemeinen so nicht. In Geschichte (und Sozialkunde) reicht etwa die Mitteilung einer Tatsache seitens der Lehrkraft. In Physik oder Chemie erfolgt das Beweisen im Allgemeinen durch Versuche, was aber in der Mathematik nicht als Beweis gilt. Im Mathematikunterricht sollte man aber beweisen, denn eine Mathematik ohne Beweise ergibt ein falsches Bild von Mathematik. (Aber auch eine Mathematik ohne Anwendungen täte dies.) Eine Methode der Motivation ist dabei eine kognitive Dissonanz aufzubauen, weil dadurch die Schüler/innen motiviert werden, diese aufzulösen. Dies geschieht etwa im Lehrbuch MatheFit4 wie folgt:

Tom hat ein Problem: „Sara, kannst du mir das erklären? Das Quadrat hat die Seitenlänge 8 und daher die Fläche $8 \times 8 = 64$, das Rechteck aber, das aus den zerschnittenen Quadratfeldern zusammengesetzt ist, eine Fläche von $13 \times 5 = 65$. Das kann doch nicht stimmen!“

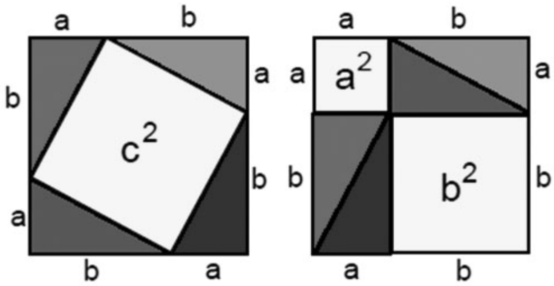
Sara schaut sich auch das Ganze an und findet keinen Fehler. Das kann doch nicht sein, dass 64 = 65 ist! Oder doch? „Glaubst du, dass sich die Flächenteile beim Bewegen vielleicht ändern?“, überlegt Sara. „So ein Quatsch“, entgegnet Tom. „Was gilt denn dann überhaupt noch?! Dann aber haben wir den Pythagoras auf S. 84 auch nicht bewiesen und dann gilt der vielleicht auch nicht!“



8 x 8 = 13 x 5 ?



Der Pythagoreische Lehrsatz wurde – wie nebenstehende Zeichnung zeigt – bewiesen (im Original sind die Flächen farbig).



Ist nun 64 = 65? Natürlich nicht. Die Lösung des Paradoxons ist recht einfach:

Steigung k_A der unteren schrägen Seite des Trapezes A im karierten Rechteck: $k_A = 2/5$
Steigung der Hypotenuse des Dreiecks C im karierten Rechteck: $k_C = 3/8$
Unterschied: $k_A - k_C = 1/40$
Das ist so wenig, dass es bei der gewählten Strichstärke nicht auffällt, aber doch insgesamt ein Kästchen ausmacht.
Daher gilt Zusammenlegen von Flächen nicht als Beweis!

Und wie ist es bei obigem Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras? Hier passen die Steigungen, wie man leicht zeigen kann.

Eine weitere Möglichkeit eine kognitive Dissonanz aufzubauen, gibt die Eulersche Primzahlformel:

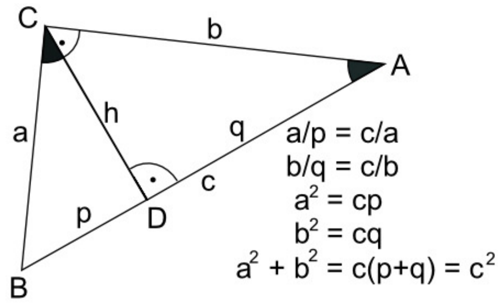
Leonhard EULER (1707 - 1783) gab folgende Formel an, mit der man Primzahlen erzeugen kann, indem man für x eine beliebige natürliche Zahl einsetzt: $x^2 + x + 41$. Untersuche, ob er Recht hatte!

Teste dabei auch 41!

Daraus erkennt man, dass Probieren in der Mathematik keine Beweismethode ist (außer es werden *sämtliche* möglichen Fälle untersucht).

Weitere einfache Aufgaben zum Beweisen wären dann (alle aus MatheFit4):

- Beweise: „In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel 180°."
- Berechne die Winkelsumme im Viereck, im n-Eck!
- Berechne die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks!
- Zeige, dass in einem Rhombus die Diagonalen (1) aufeinander normal stehen und (2) einander halbieren!
- Untersuche, ob nebenstehender Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes wirklich ein Beweis ist! Wenn nicht, ergänze, was noch fehlt!



Oder aber auch gemäß den Bildungsstandards (vgl. Praxishandbuch Bildungsstandards 8. Schulstufe, 2011, S. 54):

- Eine der binomischen Formeln lautet: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
  Begründe die Richtigkeit dieser Formel für positive Werte der Variablen durch einen grafischen Beweis!
  Schreibe dazu das Quadrieren als Multiplikation an und stelle diese Multiplikation grafisch dar!
  Verwende diese Darstellung dann als Grundlage für deinen Beweis in Worten und Variablen!

Oder aus Lehrbüchern der Oberstufe (vgl. Mathematik 5 – 7, 2011):

- Bd. 5, Aufg. 403: Begründe anhand geeigneter Skizzen, warum eine a) *streng monoton fallende*, b) *streng monoton steigende* reelle Funktion höchstens eine Nullstelle haben kann!
- Bd. 6, Aufg. 277a: Begründe die folgende Regel: $a > 0 \Rightarrow a^n > 0 \Rightarrow a^{2n} > 0$ und bestätige sie durch Belegung der Variablen a mit gegebenen reellen Zahlen ($n \in \mathbb{N}^*$)!
- Bd. 7, Aufg. 962a: Beweise: Die Standardabweichung ist stets kleiner oder gleich der Spannweite. Wann ist sie gleich?

5. Warum ist die Mathematik so **exakt**? Oder ist sie so genau?

Wie wir vorhin gesehen haben, ist „exakt“ und „genau“ nicht dasselbe (siehe dazu auch HANISCH, S. 203, 1990). Man kann dies leicht mit folgender Aufgabe (aus MatheFit4) den Schüler/innen verständlich machen:

1276 (1) Berechne den folgenden Ausdruck mit deinem Taschenrechner!
(2) Bringe auf denselben Nenner und vereinfache soweit wie möglich!
(3) Vergleiche die beiden Ergebnisse!

$$99 - 70\sqrt{2} - \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}$$

(1) Je nach der Genauigkeit deines Taschenrechners wirst du einen Wert von etwa −2,0051043420239672797310047765089e-36 erhalten. (Beachte, dass diese Zahl in Gleitkommadarstellung – siehe MatheFit3, S. 92 – angegeben ist und sowohl der Wert als auch die Anzeige bei deinem Taschenrechner anders sein können!)

(2) $99 - 70\sqrt{2} - \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} =$

$$= \frac{(99 - 70\sqrt{2})(99 + 70\sqrt{2})}{99 + 70\sqrt{2}} - \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} =$$

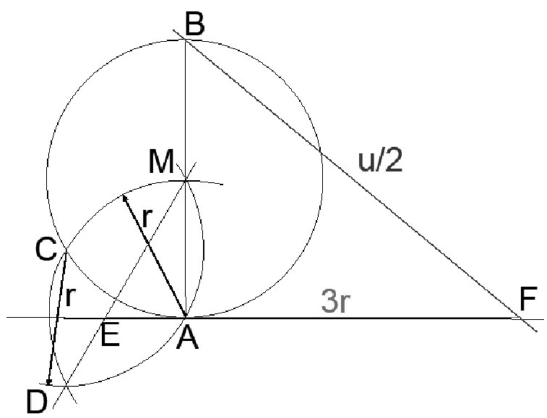
$$= \frac{99^2 - (70\sqrt{2})^2}{99 + 70\sqrt{2}} - \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} = \frac{9801 - 9800}{99 + 70\sqrt{2}} - \frac{1}{99 + 70\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1 - 1}{99 + 70\sqrt{2}} = 0$$

(3) Das Ergebnis mit dem Taschenrechner ist mit einer Genauigkeit von 36 Stellen 0, das der Bruchrechnung exakt 0.

Sehr gut erkennt man diesen Unterschied auch durch die Näherungskonstruktion von Adam Adamandy KOCHAŃSKI (1631? - 1700), bei der es darum geht, den Umfang eines Kreises durch eine Strecke darzustellen. Wie man leicht sieht, ist π dadurch sehr genau, aber nicht exakt bestimmt:

$$\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3{,}141533\ldots$$



6. Zusammenfassung

Dieses Vorgehen macht die Mathematik im Gegensatz zu anderen Wissenschaften unanfechtbar, da alle mathematischen Aussagen durch reine Gedankenoperationen auseinander hervorgebracht oder aufeinander zurückgeführt werden. Daher muss für mathematische Erkenntnisse ein streng logischer Beweis gefunden werden, bevor sie als mathematische Sätze anerkannt werden. In diesem Sinn sind mathematische Sätze prinzipiell endgültige und allgemeingültige Wahrheiten, so dass die Mathematik als *die* exakte Wissenschaft betrachtet werden kann.

Gerade diese Exaktheit ist für viele Menschen das Faszinierende an der Mathematik. (Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik)
Aber sicher nicht für alle (siehe Zeichnung).

7. Literatur

1. FROESE Norbert: Euklid und die Elemente Die Entdeckung der axiomatischen Methode durch Euklid. http://www.antike-griechische.de/Euklid.pdf
2. GÖTZ Stefan, Reichel Hans Christian, Müller Robert, Hanisch Günter: Mathematik 5 – 7, Wien 2011.
3. HANISCH Günter: Beweisen im Mathematikunterricht. Der Unterschied zwischen Logik und Psychologik. Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 1985. Vorträge auf der 19. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Giessen, S. 138-141. Bad Salzdetfurt 1985.
4. HANISCH Günter: Problematik der Leistungsfeststellungen durch schriftliche Arbeiten am Beispiel der Mathematik. Habilitationsschrift, Wien 1990.
5. HANISCH Günter, BENISCHEK Isabella, HAUER-TYPPELT Petra, SATTLBERGER Eva.: MatheFit4. Besseres Buch Wien 2011.
6. http://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_%28Mathematik%29
7. http://de.wikipedia.org/wiki/Euklid
8. http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik
9. Neureiter Hans Christian u.a.: Praxishandbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe. BIFIE (Hrsg.), Graz 2011.

8. Anschrift des Verfassers

Günter HANISCH
Fakultät für Mathematik der Universität Wien
Nordbergstraße 15, Zi. 201, 1090 Wien
guenter.hanisch@univie.ac.at